Výuka logiky bez logických pojmů

Vítězslav Švejdar*

6.2.2010, vyšlo v L. Dostálová a K. Šebela ed., *Organon VII — Nihil novi*, str. 49–57, Vydavatelství Západočeské univerzity, Plzeň, 2011.

1 Úvodní kursy logiky na různých fakultách

Úvodní kursy logiky se vyskytují ve studijních programech různých fakult. Rozdělme tyto programy a fakulty na chvíli na *humanitní* a *matematické*, a ignorujme tak pro účely tohoto textu názory, jakkoliv fundované a kvalifikované, že matematika je humanitní vědou také.

Povšimněme si otázky, jakou roli na humanitních fakultách kursy logiky hrají a jaký by měl být jejich obsah. Jeden z důvodů, proč se logika učí, je určitě *tradice:* byly doby, kdy hranice mezi filozofií, jinými společenskými vědami a matematikou byly nezřetelné a významní filozofové byli současně také významnými matematiky nebo logiky. I dnes se soudí, že filozof by měl znát logiku a její historii. Druhý důvod lze označit jako *pragmatický.* Lingvisté, psychologové, sociologové nebo právníci používají logiku v tom smyslu, že vytvářejí pojmy a alespoň část jejich práce, kromě třeba experimentů, zpracování dat a šetření různého druhu, tvoří i deduktivní usuzování. V těchto i jiných oborech se mohou uplatnit matematické metody a počítačové zpracování dat. A pokud odborníci těchto oborů sestavují či upravují studijní programy, lze od nich občas slyšet, že potřebují kursy logiky, aby jejich studenti "uměli logicky myslet". A nijak přitom nepochybují o tom, že logikové dobře vědí, jak se při výuce logického myšlení má postupovat.

Odpovědi na otázky, jak nelogiky (na)učit logicky myslet a co by mělo být cílem a obsahem kursu logiky pro nelogiky, přitom vůbec nejsou jednoduché. Logik, zejména s matematickým vzděláním, má často poměrně jasnou představu o obsahu úvodního kursu: syntax a sémantika klasické výrokové logiky, syntax a sémantika klasické predikátové logiky, věty o korektnosti a úplnosti. S touto představou ale nelze vystačit, neboť pojmy jako korektnost, úplnost a rozhodnutelnost jsou pro studenty humanitních oborů, kteří nemají zkušenost s dokazováním v matematice, příliš náročné. Na druhé straně, pravdivostní hodnoty a pravdivostní tabulky logických spojek sice zvládne každý, avšak

*Tento článek je součástí výzkumného záměru MSM 0021620839 *Metody moderní matematiky.*

nemělo by to být to jediné, co si student z kursu odnese. Pokud si absolvent za několik let po opuštění vysoké školy vzpomene pouze na to, že v logice se pracně vyplňovaly pravdivostní tabulky nenázorných formulí, což se stává, není to optimální výsledek pedagogické práce.

Výuka logiky na matematických fakultách není vlastně předmětem tohoto textu. Chci se ale zmínit o tom, že má také svá úskalí. Student matematiky má zkušenost s matematickými důkazy a dovede tudíž ocenit korektnost a úplnost kalkulů, a rozumí tomu, že jedním z motivů pro konstruování kalkulů je možnost algoritmického zpracování důkazů. Avšak z výuky některých kursů si udělal představu o "logickém uspořádání" matematiky: v matematické analýze se mohou uplatnit vědomosti z topologie a algebry, a tyto dvě disciplíny tak analýzu "logicky předcházejí". Teorie množin logicky předchází většinu ostatní matematiky. Při takovýchto úvahách o vzájemné závislosti matematických disciplín může student dospět k závěrům, že logika předchází veškerou ostatní matematiku v tom smyslu, že bez ní bychom si nebyli jisti, jestli důkaz, který čteme nebo píšeme, je správně napsaným důkazem, a že logika je jakýmsi arbitrem, který matematikovi může garantovat, že uvažuje správně. Takovýto závěr o roli logiky v matematice se ve své pedagogické práci snažím rozptylovat, neboť si spolu s G. Kreiselem [1] myslím, že logika není *hygienou matematiky.* Matematikové dovedou poznat správně napsaný důkaz i v případě, že logiku nestudovali.

Tak jako se matematikové naučili logicky myslet mimo kursy logiky, domnívám se, že i na humanitních fakultách může být vhodnější učit studenty logicky myslet nikoliv na logice samotné, ale na vhodně a opatrně zvolené matematice. Přitom dojde celkem přirozeně na to, co by si student měl do pozdějšího života odnést, například formalizovaný zápis tvrzení a podmínek, vytváření pojmů, a uvažování z předpokladů, o kterých není známo, jestli jsou pravdivé. A na význam logických spojek a kvantifikátorů. *Logikou bez logických pojmů* je tedy v tomto textu míněna výuka, kde na logiku dojde, ale nemusí dojít na náročnější pojmy, jako jsou již zmíněná úplnost či rozhodnutelnost, nebo třeba kompaktnost. K tezi, že logiku je možné nebo i vhodné učit na opatrně zvolené matematice, bude v dalším textu nabídnuto několik příkladů. Některé se již vyskytly v článku [2].

2 Proč se $(-1)\cdot(-1)$ rovná 1?

Otázka, jestli v oboru například celých čísel rovnost $(-1)\cdot(-1) = 1$ platit má nebo dokonce musí, a pokud musí, pak proč, jistě během školních let napadla nejednoho z nás. Ukažme si důkaz, že tato rovnost platí. Tento důkaz zároveň zahrnuje určitou pojmovou analýzu. Je totiž třeba si také uvědomit, jakou důležitou vlastnost má číslo 1 a co myslíme číslem -1 nebo obecně číslem $-x$ pro číslo x.

1. Číslem *opačným* k číslu x myslíme číslo y takové, že $y + x = 0$.

2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně, jsme tedy oprávněni značit je $-x$.
   Opravdu, předpokládejme, že y_1 a y_2 jsou dvě čísla opačná k x, tj. že současně platí $y_1 + x = 0$ i $y_2 + x = 0$. Pak $y_1 = 0 + y_1 = y_2 + x + y_1 = y_2 + 0 = y_2$, takže y_1 a y_2 nejsou navzájem různá.
3. Pro libovolné x platí $(-1) \cdot x = -x$.
   Tvrdí se zde, že $(-1) \cdot x$ je číslo opačné k x. Abychom to ověřili, musíme dle bodu 1 výše zdůvodnit, že $(-1) \cdot x + x = 0$. A to opravdu platí, neboť $(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$, přičemž v předposlední rovnosti byl použit fakt, že $-1+1 = 0$, neboť -1 značí číslo opačné k 1.
4. V bodu 3 bylo použito tvrzení, že $0 \cdot x$ je vždy 0.
   To je v pořádku, neboť platí $0 + 0 \cdot x = 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Přičtení čísla $-(0 \cdot x)$ k oběma stranám rovnosti $0 + 0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ dá $0 = 0 \cdot x$.
5. Bod 3 aplikován na $x = -1$ dává $(-1) \cdot (-1) = -(-1)$. Ovšem opačné číslo k -1 je 1, neboť 1 je ono číslo, jehož přičtení k -1 dá 0.

Uvedený důkaz je určitým kompromisem mezi pochopitelností a přehledností na jedné straně a úplností na straně druhé. Zcela kompletní není v tom smyslu, že v něm bez bližšího upozornění byly použity více nebo méně samozřejmé předpoklady. Například v bodu 2 byla dvakrát použita rovnost $v+0 = v$: jednou na $v = y_1$, pak na $v = y_2$. O použití a vyhledávání skrytých předpokladů bude v dalším textu ještě řeč.

3 Dělitelnost a prvočísla

O dělitelnosti se ve školské matematice obvykle uvažuje v oboru přirozených čísel. Uvažujme o ní ale raději v oboru *čísel celých*. V tomto oboru budou totiž některé úvahy logicky čistší, a navíc, až dojde na vyhledávání skrytých předpokladů, zjistíme, že některé z nich jsou tytéž, které byly skryté i v důkazu rovnosti $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Definujme tedy, že číslo x je *dělitel* čísla y nebo že x *dělí* y (nebo že y je *dělitelné* číslem x), jestliže $\exists v(v \cdot x = y)$, tj. jestliže číslo x lze vynásobit vhodným číslem v tak, aby výsledek byl y. Děliteli například čísla 6 jsou tak čísla 1, 2, 3 a 6 a také čísla -1, -2, -3 a -6. Fakt, že číslo x je dělitelem čísla y, značíme $x \mid y$. Z našich úvah nijak nevylučujeme číslo 0. Každé číslo x lze nějakým číslem, totiž nulou, vynásobit tak, aby výsledek byl 0. Tím je zdůvodněno, že každé číslo je dělitelem nuly; tento fakt nepokládáme za nepřirozený. Snadno lze zdůvodnit, že naopak 1 dělí x pro každé x a že když x dělí y a y dělí z, musí x dělit z. Tyto dva fakty lze zapsat symbolicky: $\forall x(1 \mid x)$ a $\forall x \forall y \forall z(x \mid y \;\&\; y \mid z \rightarrow x \mid z)$. Symbolické zápisy jsou ovšem výbornou příležitostí vysvětlit logické symboly v nich se vyskytující, tj. logické spojky (konjunkce &, kterou čteme "a", a implikace $\rightarrow$, kterou čteme "když, pak") a kvantifikátory (univerzální $\forall$, který čteme "pro všechna", a výše se vyskytnuvší existenční $\exists$, který čteme "existuje").

Každé číslo x je dělitelné čísly 1, -1, x a $-x$. Tato čísla považujeme za triviální dělitele čísla x. Definici triviálního dělitele ale raději vyslovme trochu jinak: *triviální dělitel čísla* x je každý dělitel čísla 1, a také každý takový dělitel čísla x, který je současně dělitelný číslem x. Například číslo 6 má dva triviální dělitele 1 a -1, kteří jsou děliteli čísla 1, další dva triviální dělitele 6 a -6 dělitelné šesti, a čtyři netriviální dělitele 2, -2, 3 a -3.

Možnost formulovat definici triviálního dělitele pouze pomocí dělitelnosti a vyhnout se pojmu opačné číslo, který se vyskytuje v (námi nepřijaté) definici vyjmenovávající čísla 1, -1, x a $-x$ jako triviální dělitele, je výbornou příležitostí demonstrovat důležitou okolnost. V logice se sice často zabýváme dokazatelností a otázkou, zda to a to tvrzení je dokazatelné z daných předpokladů, ale také se zabýváme otázkami, jak to a to vyslovit s užitím jen určitých prostředků a zda takové a takové *jazykové prostředky* jsou dostatečné pro určitý účel.

Po dělitelnosti a triviálních dělitelích se zabývejme pojmem prvočíslo. Protože ale chceme zkoumat dvě různé definice a uvažovat, zda definují totéž, definujme dočasně dva různé pojmy, ireducibilní číslo a prvočíslo. Číslo x je *ireducibilní*, jestliže není 0 ani dělitel jedničky a má pouze triviální dělitele. Číslo x je *prvočíslo*, jestliže není 0 ani dělitel jedničky, a navíc splňuje podmínku $\forall a \forall b(x \mid a \cdot b \rightarrow x \mid a \vee x \mid b)$, tj. splňuje podmínku, že kdykoliv dělí součin dvou čísel, dělí i některé z nich. Například číslo -1 není ireducibilním číslem ani prvočíslem, neboť je dělitelem jedničky. Číslo 6 není prvočíslem, neboť například dělí součin $8 \cdot 3$, avšak není dělitelem žádného z čísel 8 a 3. Číslo 6 ovšem není ani ireducibilní, neboť má, jak již bylo konstatováno, několik netriviálních dělitelů, například dvojku. Číslo 3 je ireducibilní, neboť splňuje podmínku, že není nulou ani dělitelem jedničky, a z jeho čtyř dělitelů jsou všechny buď děliteli jedničky, nebo jsou dělitelné třemi. Poněkud obtížnější je důkaz, že 3 je prvočíslo:

> Uvažujme a a b taková, že $3 \mid a \cdot b$. Máme zdůvodnit, že $3 \mid a$ nebo $3 \mid b$. Předpokládejme tedy, že trojka není dělitelem čísel a ani b, a zdůvodníme, že není dělitelem součinu $a \cdot b$. Pokud 3 nedělí a, dělení čísla a třemi dá zbytek jiný než 0, tj. dá zbytek 1 nebo 2. Číslo a má tedy tvar $3u + 1$ nebo $3u + 2$. Ze stejného důvodu b má tvar $3v + 1$ nebo $3v + 2$. Pokud $a = 3u+1$ a $b = 3v+1$, pak $a \cdot b$ je $(3u+1) \cdot (3v+1) = 9uv+3u+3v+1 = 3(3uv + u + v) + 1$, tedy číslo, jehož dělení třemi dá zbytek 1. Podobně, když $a = 3u + 1$ a $b = 3v + 2$, číslo $a \cdot b$ dá zbytek 2 při dělení třemi. Také ve zbývajících dvou případech, kdy $a = 3u + 2$ a přitom $b = 3v + 1$ nebo $b = 3v + 2$, dělení $a \cdot b$ třemi dá zbytek 2 resp. 1. Číslo $a \cdot b$ tedy opravdu dělitelné třemi není.

Podobně bychom mohli ověřit, že i 5 je prvočíslo, jen případů, které je třeba probrat, by bylo více. A v případě čísel 7 nebo 11 by jich bylo ještě více, kdežto v případě čísla 2 by jich naopak bylo méně. Důkaz, že 2 je prvočíslo, se vlastně redukuje na ověření, že součin dvou lichých čísel je lichý.

Nyní jsme připraveni uvažovat o tom, zda ireducibilní čísla jsou táž čísla jako prvočísla.

Věta 1 *Každé prvočíslo je ireducibilní.*

Důkaz Nechť x je prvočíslo. Číslo x tedy splňuje podmínku, že není 0 ani dělitel jedničky, a k důkazu, že x je ireducibilní, zbývá ověřit, že x nemá netriviální dělitele. Nechť tedy u je libovolný dělitel čísla x. Podmínka $u \mid x$ podle definice znamená, že existuje v takové, že $u \cdot v = x$. Protože $x \mid x$, tj. $x \mid u \cdot v$, z faktu, že x je prvočíslo, máme $x \mid u$ nebo $x \mid v$. Proberme oba případy. Když $x \mid u$, jsme hotovi, u je dělitel čísla x dělitelný číslem x, tedy je to triviální dělitel. Zabývejme se případem $x \mid v$. V tomto případě existuje z takové, že $x \cdot z = v$. Z toho a z $u \cdot v = x$ máme $u \cdot x \cdot z = x$. Protože x není nula, máme $u \cdot z = 1$. Tím jsme hotovi, u je opět triviální dělitel čísla x, neboť je to dělitel jedničky. ■

Před úvahami, zda každé ireducibilní číslo je prvočíslo, nejprve uveďme nebo připomeňme, co tvrdí *Bezoutova věta*. Vezměme celá čísla $x = 21$ a $y = 15$. Uvažujme o číslech tvaru $x \cdot u + y \cdot v$ pro měnící se (celá) u a v. Zvolíme-li například $u = -1$ a $v = -1$, číslo $x \cdot u + y \cdot v = -36$ není pro naše účely nijak pozoruhodné. Avšak zvolíme-li například $u = 7$ a $v = -10$, číslo $x \cdot u + y \cdot v = -3$ je společným dělitelem čísel x a y. Bezoutova věta tvrdí, že pro každou dvojici čísel x, y lze zvolit dvojici u, v tak, aby $x \cdot u + y \cdot v$ bylo dělitelem x i y. Symbolicky: $\forall x \forall y \exists u \exists v (x \cdot u + y \cdot v \mid x \ \& \ x \cdot u + y \cdot v \mid y)$.

Věta 2 *Z Bezoutovy věty plyne, že každé ireducibilní číslo je prvočíslo.*

Důkaz Nechť x je ireducibilní, tj. x není 0 ani dělitel jedničky a nemá žádné netriviální dělitele. Máme ověřit podmínku $\forall a \forall b (x \mid a \cdot b \rightarrow x \mid a \vee x \mid b)$. Nechť tedy a a b jsou čísla taková, že $x \mid a \cdot b$. Aplikujme Bezoutovu větu na dvojici x, a: existují u, v taková, že $x \cdot u + a \cdot v$ dělí současně x i a. Protože $x \cdot u + a \cdot v$ dělí x a x má pouze triviální dělitele, máme $x \cdot u + a \cdot v \mid 1$ nebo $x \mid x \cdot u + a \cdot v$. Rozeberme oba případy. V druhém z nich jsme hotovi: z $x \mid x \cdot u + a \cdot v$ a $x \cdot u + a \cdot v \mid a$ máme $x \mid a$. V prvním z nich z $x \cdot u + a \cdot v \mid 1$ plyne $x \cdot u \cdot b + a \cdot b \cdot v \mid b$. Připomeňme si, že x dělí $a \cdot b$. Protože číslo x dělí obě čísla $x \cdot u \cdot b$ a $a \cdot b \cdot v$, dělí i jejich součet. Tedy jsme také hotovi, $x \mid b$. ■

4 Logické kroky a logická analýza

V našich důkazech si lze všimnout, že se v nich vyskytují nebo dokonce opakují určité logické kroky. Jedním z nich je *rozbor případů*: zjistíme-li, že platí C nebo D, a zjistíme-li dále, že platí-li C, musí platit A, a platí-li D, také musí platit A, můžeme usoudit, že platí A. Například v naposled uvedeném důkazu jsme z předpokladu C tvrdícího, že $x \cdot u + a \cdot v \mid 1$ z předpokladu D tvrdícího, že $x \mid x \cdot u + a \cdot v$, nezávisle na sobě usoudili, že $x \mid a \;\vee\; x \mid b$, a pak jsme ze znalosti $C \;\vee\; D$ uzavřeli, že $x \mid a \;\vee\; x \mid b$. Druhým často se vyskytujícím obratem je *specifikace*, někdy též nazývaná *konkretizace* nebo *instanciace*: víme-li, že všechna individua mají vlastnost A, můžeme usoudit, že naše x má vlastnost A. Například když jsme věděli, že x má pouze triviální dělitele a že $x \cdot u + a \cdot v$ je dělitel, usoudili jsme, že $x \cdot u + a \cdot v$ je triviální dělitel. A když jsme věděli, že $(-1) \cdot x$ je vždy opačné číslo k číslu x, usoudili jsme, že $(-1) \cdot (-1)$ je opačné číslo k číslu -1. Dalším logickým obratem, který lze například vypozorovat v našem důkazu, že 3 je prvočíslo, je *kontrapozice*: máme-li zdůvodnit, že z A plyne B, stačí místo toho zdůvodnit, že z negace $\neg B$ závěru B plyne negace $\neg A$ předpokladu A. A ještě dalším velmi důležitým obratem je *generalizace*: zdůvodníme-li, že x má vlastnost A, aniž bychom o x cokoliv předpokládali, můžeme uzavřít, že *každé* x má vlastnost A. Například dovedeme-li od předpokladu, že x dělí součin $a \cdot b$ blíže neurčených čísel a, b, dojít k závěru, že $x \mid a$ nebo $x \mid b$, můžeme usoudit, že $\forall a \forall b (x \mid a \cdot b \;\rightarrow\; x \mid a \;\vee\; x \mid b)$, tj. že předmětné tvrzeni platí pro každou dvojici a, b. V matematických důkazech je generalizace obvykle reprezentována obraty jako "nechť a a b jsou dána", kterými autor takového důkazu naznačuje, že čísla a, b si nevolí, nýbrž je připraven na každou jejich volbu. V úvodních kursech matematiky k pochopení generalizace — a kvantifikátorů vůbec — často napomáhá představa *hry*, v níž se snažíme vyhrát: *protihráč* volí čísla a, b, kdežto *my* pak hledáme vhodnou reakci na tento jeho tah.

Stejně jako tvrzení a vlastnosti objektů lze zapisovat symbolicky, i logické obraty (*pravidla správného usuzování*) lze zapisovat symbolicky. Například kontrapozici lze zapsat jako $\neg B \rightarrow \neg A \;/\; A \rightarrow B$, kde lomítko čteme "lze (je povoleno) odvodit". Pozorování, že v důkazech a argumentech se opakují stále tytéž obraty, a naděje, že s nevelkým množstvím takových obratů lze vystačit ve *všech* důkazech, jsou okolnosti, na kterých je logika vlastně založena. A možnost formalizovat, tj. zapisovat symbolicky podle přesných syntaktických pravidel nejen tvrzení a vlastnosti ale i celé důkazy, je motivována otázkou, která byla v logice (filozofii) už od antiky pravděpodobně přítomna, totiž zda to, co je pravda, lze zjistit symbolickou manipulací či algoritmem.

Moderní logika dává přesnější představu o otázkách, které byly právě naznačeny. Máme logické kalkuly, jejichž konstrukce je vždy založena na volbě a formalizaci několika logických obratů. Máme věty o úplnosti, které lze interpretovat jako tvrzení, že s danými několika obraty opravdu lze vystačit ve *všech* důkazech. A máme pojmy rekurzívní a rekurzívně spočetná množina, s jejichž pomocí lze vysvětlit rozdíl mezi zkontrolováním důkazu a jeho vytvořením: možnost vystačit s několika přesně popsanými obraty a možnost algoritmické kontroly a algoritmického zpracování důkazů ještě nemusí znamenat (a opravdu neznamená) možnost algoritmického *pořízení* požadovaného důkazu.

Avšak věty o úplnosti a rekurzívní a rekurzívně spočetné množiny jsou právě ty pojmy, u kterých nevadí, budou-li v úvodním kursu logiky na humanitních fakultách pouze naznačeny nebo úplně pominuty. Podle mého názoru se lze spokojit s tím, když student umí identifikovat a pojmenovat několik často se vyskytujících obratů. Co ale lze provést i v úvodním kursu je *logická analýza* důkazů. Tou pro účely tohoto textu míním uvažování, zda v daném důkazu nebyly skrytě použity nějaké předpoklady týkající se zkoumaných objektů. Jde tedy nikoliv o logické obraty, které se mohou vyskytnout ve všech důkazech veškeré matematiky, a vlastně i v argumentech mimo matematiku, ale o matematické předpoklady týkající se dané oblasti zkoumání, například (v našem případě) celých čísel.

V našich důkazech o dělitelnosti jsme například použili fakt, že jednička je dělitelem každého čísla x. Odpověď na otázku, proč jsme si jisti, že to tak je, může znít například takto: jedničku lze vynásobit vhodným číslem, totiž číslem x samým, tak, aby výsledek byl x. Tato odpověď redukuje fakt, že $\forall x(1 \mid x)$, na fakt, že $\forall x(1 \cdot x = x)$, tj. na fakt, že jednička je neutrální prvek operace násobení. Jinak řečeno, fakt, že jednička je neutrální prvek operace násobení, byl identifikován jako skrytý předpoklad v našich důkazech. Podobně se můžeme ptát, proč je relace dělitelnosti tranzitivní, tj. proč jsme si jisti, že z $x \mid y$ a $y \mid z$ plyne $x \mid z$. Podmínky $x \mid y$ a $y \mid z$ znamenají existenci čísel v_1 a v_2 takových, že $x \cdot v_1 = y$ a $y \cdot v_2 = z$. Z těchto dvou rovností máme $(x \cdot v_1) \cdot v_2 = z$, takže k závěru, že x lze vynásobit vhodným číslem — máme ovšem na mysli číslo $v_1 \cdot v_2$ — tak, aby výsledek byl z, potřebujeme rovnost $(x \cdot v_1) \cdot v_2 = x \cdot (v_1 \cdot v_2)$, tj. potřebujeme asociativní zákon. Fakt, že pro násobení platí asociativní pravidlo (zákon), byl tak identifikován jako další skrytý předpoklad vyskytující se v našich důkazech. V ověření, že z $x \mid y$ plyne jak $xz \mid yz$, tak $zx \mid zy$, bylo asociativní pravidlo použito také, navíc v jednom z případů bylo použito i komutativní pravidlo $\forall u \forall v(u \cdot v = v \cdot u)$. Snadno lze ověřit, že abychom mohli usoudit, že dělí-li x čísla a i b, dělí i $a+b$, potřebujeme distributivní pravidlo $x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$.

K vyhledávání skrytých předpokladů se mohou vyskytnout dvě otázky či námitky. První zní, že jde o proces poněkud svévolný, neboť není předem dáno, které předpoklady se mají redukovat ke kterým a které se mají považovat za “základnější” než jiné. Této námitce nezbývá než dát za pravdu, logická analýza naznačená v předchozím odstavci je motivována hlediskem, že vlastnosti sčítání a násobení celých čísel jsou základnější než fakty o dělitelnosti, a toto hledisko nemusí být jediné možné. Je ovšem alespoň z části oprávněné tím, že například předpoklad o asociativnosti násobení, který je skrytý v argumentu, že relace dělitelnosti je tranzitivní, byl v důkazu Věty 1 použit sám o sobě. Druhá námitka může znít, že vyhledávání skrytých předpokladů je neperspektivní proces, neboť lze jít hlouběji a hlouběji a identifikovat předpoklady další a další, a může nastat situace, že jich vyhledáme nepřehledně mnoho a přitom nebude jisté, jestli ještě máme či můžeme pokračovat.

Této druhé námitce nelze jen tak dát za pravdu. Logická analýza důkazů z nějaké oblasti často vyústí v nalezení přehledné množiny předpokladů, se kterými lze vystačit, tj. vyústí ve zkonstruování nějaké přehledné *axiomatické teorie*. Například ve (skoro všech) našich úvahách o dělitelnosti lze vystačit s předpoklady, že sčítání i násobení jsou asociativní a komutativní operace, že nula je neutrální vůči sčítání, 1 je neutrální vůči násobení, platí distributivita a ke každému číslu existuje číslo k němu opačné. Těmto předpokladům se říká axiomy komutativního okruhu a je zajímavé, že nic dalšího než tyto axiomy se nevyskytly ani v logické analýze našeho prvního důkazu, tj. důkazu rovnosti $(-1)(-1) = 1$.

Zajímavá otázka je, zda v oboru celých čísel platí něco, co nelze dokázat pouze z axiomů komutativního okruhu. Definitivní odpovědi se vyhneme, avšak částečná odpověď zní, že například $\forall x \forall y (x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0)$, tj. fakt, že součin nenulových čísel nikdy není nula. Tento fakt lze pokládat za dodatečný axiom; jeho přidáním k teorii komutativních okruhů vznikne (jiná a silnější) teorie *oborů integrity*. Z axiomů oboru integrity plyne, že když $x \cdot z = y \cdot z$ a $z \neq 0$, pak $x = y$. Tento fakt jsme v našich úvahách o dělitelnosti v jednom místě potřebovali také.

Poněkud zvláštní postaveni má v našich úvahách Bezoutova věta. Tu lze prohlásit za ještě další axiom, který přidáváme k axiomům oboru integrity. Kdybychom se ale rozhodli, že Bezoutova věta není zdaleka tak elementární fakt jako axiomy komutativních okruků, mohli bychom její platnost redukovat (například) k platnosti vhodně formulovaného axiomu (schématu) indukce pro celá čísla. I toto jsou ale úvahy, do kterých se v tomto článku nepouštíme.

Logická analýza důkazů (argumentů) z určité oblasti matematiky je mnohdy úspěšná v tom smyslu, že jejím výsledkem je přehledná axiomatická teorie, k níž lze redukovat (v níž lze formalizovat) všechny takové důkazy. Tato okolnost (také) dělá z logiky atraktivní disciplínu a pokládám ji za možná ještě důležitější, než existenci nevelkého množství logických kroků a možnost založit na nich konstrukci logických kalkulů.

Literatura

[1] G. Kreisel a J. L. Krivine. *Elements of Mathematical logic (Model Theory)*. North-Holland, Amsterdam, druhé opravené vydání, 1971.

[2] V. Švejdar. Logika v aritmetice. V P. Jirků a V. Švejdar, editoři, *Miscellanea Logica I*, str. 36–48. Karolinum, Praha, 1998. ISBN 80-7184-578-7.