Cvičení ke kursu *Modální a neklasické logiky* (4. ledna 2023)

Cvičení

1. Navrhněte gentzenovská pravidla pro případ, že i spojka ekvivalence $\equiv$ by se považovala za základní logickou spojku. Pravidla mají být korektní (vůči klasické dvouhodnotové i vůči kripkovské sémantice) a mají mít vlastnost podformulí (*subformula property*).

2. Löbovo pravidlo LR je pravidlo $\Box A \to A \ / \ A$. Ověřte (ale je to skoro očividné), že toto pravidlo je v logice GL *přípustné*, neboli že množina všech formulí dokazatelných v GL je na toto pravidlo uzavřena. Dokažte, že přidání pravidla LR k logice K4 dá logiku ekvivalentní s GL.

   Návod. Označte B formuli $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$, a dokažte formuli $\Box B \to B$ v logice K4.

3. Dokažte, že v logice K je pravidlo LR přípustné, čili že jeho přidání k hilbertovskému kalkulu logiky K nezmění množinu všech dokazatelných formulí.

   Návod. Využijte větu o úplnosti logiky K dokázanou v přednášce: pro důkaz dokazatelnosti formule A stačí ověřit, že A platí ve všech konečných (antireflexívních) stromech.

4. Gentzenovský kalkulus pro logiku dokazatelnosti má jediné odvozovací pravidlo $\langle \Gamma, \Box\Gamma, \Box A \Rightarrow A \rangle \ / \ \langle \Box\Gamma \Rightarrow \Box A \rangle$. Dokažte, že tento kalkulus a hilbertovský kalkulus pro logiku dokazatelnosti se vzájemně simulují, a tudíž jsou ekvivalentní.

5. Důkaz věty o úplnosti logiky K uvedený v přednášce je založen na algoritmu, který při zpracování parametrů Γ a Δ někdy volá sám sebe (využívá rekurzívní volání procedur). Přitom parametry vnořeného volání vždy mají dohromady méně výskytů symbolů (spojek a modality $\Box$) než původní parametry Γ a Δ. Rozmyslete si, že algoritmus lze upravit pro logiku GL. Gentzenovský kalkulus pro logiku GL je tedy úplný vůči konečným tranzitivním antireflexívním rámcům a platí pro něj věta o eliminovatelnosti řezů. Logika GL je rozhodnutelná a má vlastnost konečných modelů (*finite model property*).

   Návod. Při zpětné aplikaci modálního pravidla na sekvent, který není iniciální a v němž nejvnějšnější symbol žádné formule není spojka, se antecedent (na rozdíl od algoritmu pro logiku K) může zvětšit. Avšak zároveň v antecedentu musí přibýt formule začínající modalitou.

6. Promyslete následující důkaz úplnosti gentzenovského kalkulu pro logiku K4, který není založen na analýze algoritmu využívajícího rekurzívní volání procedur, ale věta o eliminovatelnosti řezů a vlastnost konečných modelů z něj plyne také. Sekvent $\langle\, \Gamma \Rightarrow \Delta \,\rangle$ je *saturovaný*, jestliže splňuje podmínky

   - když $B \,\&\, C$ je v Γ nebo $B \vee C$ je v Δ, pak B i C je v Γ resp. v Δ,
   - když $B \vee C$ je v Γ nebo $B \,\&\, C$ je v Δ, pak B nebo C je v Γ (v Δ),
   - když $\neg B$ je v Γ nebo $\neg B$ je v Δ, pak B je v Δ resp. v Γ,
   - když $B \to C$ je v Γ, pak B je v Δ nebo C je v Γ,
   - když $B \to C$ je v Δ, pak B je v Γ a C je v Δ.

   Lemma 1 tvrdí, že *pro každý sekvent* $\langle\, \Gamma \Rightarrow \Delta \,\rangle$*, který v kalkulu pro logiku K4 nemá bezřezový důkaz, existuje saturovaný sekvent* $\langle\, \Pi \Rightarrow \Lambda \,\rangle$*, který také nemá bezřezový důkaz, a přitom* $\Gamma \subseteq \Pi$ *a* $\Delta \subseteq \Lambda$*, a navíc každá formule v* $\Pi \cup \Lambda$ *je sestavena z podformulí formulí v* $\Gamma \cup \Delta$. Nechť $\langle\, \Sigma \Rightarrow \Omega \,\rangle$ je (nadále fixní) sekvent, který nemá bezřezový důkaz. Definujme W jako množinu všech saturovaných sekventů, které jsou sestaveny z podformulí formulí v $\Sigma \cup \Omega$ a nemají bezřezový důkaz. Pak $W \neq \emptyset$ (proč?) a W je konečná. Definujme relaci R na množině W takto: $\langle\, \Gamma \Rightarrow \Delta \,\rangle \; R \; \langle\, \Pi \Rightarrow \Lambda \,\rangle$ jestliže kdykoliv $\Box B \in \Gamma$, pak $\Box B \in \Pi$ a $B \in \Pi$. Relace R je tranzitivní (proč?). Definujme $\Vdash$ takto: $\langle\, \Gamma \Rightarrow \Delta \,\rangle \Vdash p$, právě když $p \in \Gamma$. Lemma 2 tvrdí, že *pro každou formuli* A *a každý sekvent* $\langle\, \Gamma \Rightarrow \Delta \,\rangle \in W$ *platí implikace*

   $$A \in \Gamma \Rightarrow \langle\, \Gamma \Rightarrow \Delta \,\rangle \Vdash A \quad a \quad A \in \Delta \Rightarrow \langle\, \Gamma \Rightarrow \Delta \,\rangle \nVdash A.$$

   Výsledný model $\langle W, R, \Vdash \rangle$ je konečný protipříklad na sekvent $\langle\, \Sigma \Rightarrow \Omega \,\rangle$.

7. O každé z následujících tříd rozhodněte, jestli je charakteristickou třídou nějaké modální logiky:

   (a) $\{\, [W, R] \,;\, R = \emptyset \,\}$,

   (b) $\{\, [W, R] \,;\, R \neq \emptyset \,\}$,

   (c) $\{\, [W, R] \,;\, R = W^2 \,\}$,

   (d) $\{\, [W, R] \,;\, \forall x \forall y (x \; R \; y \Rightarrow \exists z (x \; R \; z \,\&\, z \; R \; y)) \,\}$,

   (e) $\{\, [W, R] \,;\, \forall x \exists y (x \; R \; y) \,\}$,

   (f) $\{\, [W, R] \,;\, \forall x \neg (x \; R \; x) \,\}$,

   (g) $\{\, [W, R] \,;\, \forall x \forall y \neg (x \; R \; y \Rightarrow \neg (y \; R \; x)) \,\}$.

8. Pomocí kripkovské sémantiky dokažte, že pravidlo $\Box A \;/\; A$ je přípustným pravidlem logiky GL. Týž fakt dokažte důkazově teoreticky, tj. úvahou o tom, jak může (musí) vypadat poslední krok v bezřezovém důkazu sekventu $\langle \Rightarrow \Box A \rangle$.