Cvičení ke kursu *Vlastnosti axiomatických teorií* (15. ledna 2024)

Cvičení

1. Nechť P a Q jsou unární a R binární predikát. Dokažte, že následující sentence jsou logicky platné, ale obrátíme-li (vnější) implikaci, ve všech případech vznikne formule, která logicky platná není:
   $\exists x(P(x) \mathbin{\&} Q(x)) \rightarrow \exists xP(x) \mathbin{\&} \exists xQ(x)$,
   $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$,
   $\exists x\forall yR(x,y) \rightarrow \forall y\exists xR(x,y)$,
   $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x))$,
   $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x))$.

2. Jsou $\forall x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$, $\exists x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$ a $\exists x(\exists yP(y) \rightarrow P(x))$ logicky platnými sentencemi?

3. U těch sentencí z předchozích dvou cvičení, které jsou logicky platné, zdůvodněte jejich dokazatelnost v hilbertovském kalkulu. Využijte tautologické důsledky a dokazatelnost tautologií, avšak obejděte se bez věty o úplnosti predikátového kalkulu.

4. Dokažte, že pro libovolné formule φ a ψ a množinu formulí Δ platí $\Delta, \psi \models \varphi$, právě když $\Delta \models \psi \rightarrow \varphi$.

5. Teorie T a S jsou *ekvivalentní*, jestliže každý axiom teorie S vyplývá z T a zároveň každý axiom teorie T vyplývá z S. Dokažte, že T a S jsou ekvivalentní, právě když mají stejné modely (tj. každý model teorie T je zároveň modelem teorie S a naopak).

6. Nechť φ je formule v jazyce L. Uvažujte podmínky (i) existuje číslo n a termy $t_1, .., t_n$ jazyka L takové, že formule $\varphi_x(t_1) \vee \, .. \, \vee \varphi_x(t_n)$ je logicky platná, a (ii) formule $\exists x\varphi$ je logicky platná. Zdůvodněte, že z (i) plyne (ii), ale opačné tvrzení (ii) $\Rightarrow$ (i) obecně neplatí.

   Návod. Zvolte jazyk $\{P\}$ a formuli $P(x) \rightarrow \forall vP(v)$. Protože funkční symboly v jazyce nejsou, termy $t_1, .., t_n$ musí být proměnnými, řekněme $z_1, .., z_n$, kde některé z_i mohou být totožné. Ale žádná disjunkce tvaru $\bigvee_i (P(z_i) \rightarrow \forall vP(v))$ očividně logicky platná není.

7. Tvrzení, že je-li navíc φ otevřená, pak podmínky (i) and (ii) v předchozím cvičení jsou ekvivalentní, platí. Je známé jako Hilbertova-Ackermannova věta, ale v přednášce zmíněné nebylo. Zdůvodněte, že v této větě by se nedalo vystačit s jediným termem: je-li φ otevřená formule v jazyce L a formule $\exists x\varphi$ je logicky platná, pak nemusí existovat term t jazyka L takový, že formule $\varphi_x(t)$ je logicky platná.

   Návod. Uvažujte jazyk $\{P, F\}$ s unárním predikátem a unární funkcí, a vezměte formuli $P(x) \vee \neg P(F(x))$. Term t musí mít tvar $F^{(m)}(z)$, kde z je proměnná.

8. K formuli φ z návodu k předchozímu cvičení najděte n a termy $t_1, .., t_n$ jazyka L takové, že formule $\varphi_x(t_1) \vee \,..\, \vee \varphi_x(t_n)$ je logicky platná.

9. Nechť T je teorie s jazykem $\{\in\}$ s jediným binárním predikátem a s axiomy
   $\forall x \forall y(\forall v(v \in x \equiv v \in y) \to x = y)$,
   $\exists x \forall v \neg(v \in x)$,
   $\forall x \forall y \exists z \forall v(v \in x \vee v = y \to v \in z)$.

   (a) Dokažte pomocí konečných modelů, že $\forall x(x \notin x)$ a $\neg\exists x \forall v(v \in x)$ jsou sentence nedokazatelné v T.
   (b) Dokažte, že žádný z axiomů teorie T není dokazatelný z ostatních dvou.

10. Uvažujte teorii T s prázdným jazykem a prázdnou množinou axiomů. Popište všechny její modely. Najděte její rozšíření S v tomtéž (prázdném) jazyce, které je bezesporné a nemá žádné konečné modely.

11. Pro každou ze struktur $\langle \mathrm{N}, < \rangle$, $\langle \mathrm{Z}, < \rangle$ a $\langle \mathrm{Q}, < \rangle$ najděte sentenci, která v ní platí, ale neplatí v ostatních dvou. Lze také struktury $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ odlišit platností nějaké sentence? A co struktury $\langle \mathrm{Z}, + \rangle$ a $\langle \mathrm{Q}, + \rangle$?

12. Dokažte, že struktury $\langle \mathrm{R}, < \rangle$ a $\langle \mathrm{R} - \{0\}, < \rangle$ spolu nejsou izomorfní. Dokažte, že ale jsou elementárně ekvivalentní.

    Návod. V první z nich má každá neprázdná shora omezená množina supremum. O druhé to pravda není. Obě struktury jsou modely téže úplné teorie.

13. Zdůvodněte s užitím Vaughtova testu, že teorie S z cvičení 10 je úplná.

14. Dokažte, že je-li teorie T ekvivalentní (ve smyslu cvičení 5) s nějakou konečnou množinou sentencí, pak je ekvivalentní i s vlastní konečnou podmnožinou. Vyvoďte z toho, že teorie z cvičení 10 není konečně axiomatizovatelná. Ani teorie SUCC není konečně axiomatizovatelná.

15. Dokažte že když třída $\mathcal{C}$ struktur pro určitý jazyk je axiomatizovatelná a její komplement $-\mathcal{C}$ (tj. třída všech struktur pro týž jazyk, které nejsou v $\mathcal{C}$) je také axiomatizovatelný, pak $\mathcal{C}$ i $-\mathcal{C}$ jsou dokonce konečně axiomatizovatelné.

16. Dokažte, že třída všech souvislých neorientovaných grafů, chápaných jako struktury pro jazyk s binárním predikátem jako jediným symbolem, není axiomatizovatelná.

17. Uvažujte třídu všech struktur $\langle D, P\rangle$ pro jazyk s jedním unárním predikátem takových, že P i $D - P$ jsou nekonečné. Dokažte, že tato třída je axiomatizovatelná. Je konečně axiomatizovatelná? Rozhodněte, pro která κ je příslušná teorie κ-kategorická.

18. Zdůvodněte, že teorie, která má jazyk $\{+, 0, \mathrm{S}\}$ a axiomy Q1–Q5, je konzervativním rozšířením teorie s axiomy Q1–Q3.

19. Stejným postupem dokažte, že přidáním axiomů Q4 a Q5 k SUCC vznikne teorie, která je konzervativním rozšířením teorie SUCC. Totéž dokažte jednodušeji na základě tohoto faktu: *každé bezesporné rozšíření úplné teorie je konzervativní.* Tento fakt zdůvodněte. Vysvětlete, že tedy i $\mathrm{Th}(\langle \mathrm{N}, +, 0, \mathrm{s}\rangle)$ je konzervativním rozšířením teorie SUCC. Zdůvodněte, že toto poslední tvrzení nelze dokázat metodou z předchozího cvičení: struktura $\langle \mathrm{N}, 0, \mathrm{s}\rangle + \langle \mathrm{Z}, \mathrm{s}\rangle$ nemá žádnou expanzi, která je modelem teorie $\mathrm{Th}(\langle \mathrm{N}, +, 0, \mathrm{s}\rangle)$.

    Návod. Sčítání v dané struktuře nelze definovat tak, aby platily sentence $\forall x \exists y(x = y + y \vee x = \mathrm{S}(y + y))$ a $\forall x \forall y \forall z(z + x = z + y \rightarrow x = y)$.

20. Nechť γ je sentence $\forall x(\mathrm{S}(\mathrm{S}(\mathrm{S}(x))) = x \rightarrow \exists y(((y + x) + x) + x = y))$. Dokažte ji v Q. Dokončete důkaz, který nalezl Jan Urbánek, že Q není konzervativním rozšířením teorie Q1–Q5.

    Hint. V důkazu sentence γ v Q pracujte s $y = x \cdot x$. Pak přidejte k $\mathbb{N}$ tři nestandardní prvky a, b a c a položte $\mathrm{S}^{\mathcal{M}}(a) = b$, $\mathrm{S}^{\mathcal{M}}(b) = c$ a $\mathrm{S}^{\mathcal{M}}(c) = a$. Definujte rozšíření $+^{\mathcal{M}}$ operace $+^{\mathbb{N}}$ tak, aby platilo $a +^{\mathcal{M}} a = b +^{\mathcal{M}} a = c$ a $c +^{\mathcal{M}} a = a$.

21. Nechť $M = \mathrm{N} \cup \{a, b\}$ a uvažujte prodloužení následnické funkce struktury $\mathbb{N}$ definované tak, že každý z prvků a a b je následníkem druhého. Dokažte, že na množině M lze (více způsoby) definovat sčítání a násobení tak, aby výsledná struktura $\mathcal{M}$ byla modelem Robinsonovy aritmetiky Q.

22. Rozhodněte, zda následující sentence jsou dokazatelné v Q:

$\forall x(x \le x)$	$\forall x \forall y(x + y = 0 \rightarrow x = 0 \ \&\ y = 0)$
$\forall x(x \le 0 \rightarrow x = 0)$	$\forall x \forall y(x \le y \equiv \mathrm{S}(x) \le \mathrm{S}(y))$
$\forall x(0 \le x)$	$\forall x \forall y(x < y \rightarrow x < \mathrm{S}(y))$
$\forall x(0 \cdot x = 0)$	$\forall x \forall y(\mathrm{S}(x) < y \rightarrow x < y)$
$\forall x(x \cdot \overline{1} = x)$	$\forall x \forall y(x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0)$
$\forall x \forall y \exists z(x \le z \ \&\ y \le z)$	$\forall x(x \le \overline{1} \rightarrow x = 0 \vee x = \overline{1})$

$\forall x \neg (x < x)$ $\quad\quad$ $\forall x \forall y \forall z ((z + y) + x = z + (y + x)).$

$\forall x \forall y (x \leq y \rightarrow x < y \vee x = y)$

Návod. Nedokazatelnost lze většinou dokázat vhodnou volbou operací v cvičení 21, a lze přitom vystačit s celkem dvěma modely.

23. Dokažte, že každé přirozené číslo je definovatelným prvkem struktury $\langle \mathrm{N}, < \rangle$. Nechť dále R je relace $\{ [a,b] \,;\, |a-b| = 1 \}$. Dokažte, že i ve struktuře $\langle \mathrm{N}, R \rangle$ je každé přirozené číslo definovatelným prvkem.

24. Užijte Postovu větu k důkazu, že když $X \subseteq \mathrm{N}^q$ a $Y \subseteq \mathrm{N}^q$ jsou *RE* množiny takové, že $X \cup Y$ je rekurzívní a $X \cap Y = \emptyset$, pak X i Y jsou rekurzívní.

25. Dokažte, že když $f : \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N}$ je rostoucí rekurzívní funkce, pak $\mathrm{Rng}(f)$ je rekurzívní množina.

26. Dokažte, že když $R \subseteq \mathrm{N}^2$ je ekvivalence, která má pouze konečně mnoho tříd (tříd ekvivalence) a je *RE*, pak R je dokonce rekurzívní.

    Návod. Nechť $A_1 \ldots, A_n$ je seznam všech tříd ekvivalence R. Zdůvodněte podrobně následující fakta. Každá A_i je *RE*, její komplement také a ze seznamu $A_1 \ldots, A_n$ lze relaci R definovat rekurzívní podmínkou.

27. *Charakteristická funkce* množiny $A \subseteq \mathrm{N}^q$ je funkce definovaná předpisem $f(n_1, \ldots, n_q) = 1$ pro $[n_1, \ldots, n_q] \in A$ a $f(n_1, \ldots, n_q) = 0$ pro $[n_1, \ldots, n_q] \notin A$. Je jasné, že když $\varphi(\underline{x}, y)$ definuje graf charakteristické funkce f množiny A a je Σ_1, pak $\varphi(\underline{x}, \overline{1})$ definuje A a $\varphi(\underline{x}, 0)$ definuje $-A$. Takže $A \in \Delta_1$. Dokažte, že opačné tvrzení platí také: charakteristická funkce rekurzívní množiny musí být rekurzívní.

28. Dokažte, že když A je r-ární rekurzívní (nebo *RE*, nebo Π_1) podmínka a $g_1, \ldots, g_r$ jsou rekurzívní funkce, pak $\{ [n_1, \ldots, n_q] \,;\, A(g_1(\underline{n}), \ldots, g_r(\underline{n}) \}$ je rekurzívní (resp. *RE* nebo Π_1) množina. Jinými slovy, dosazením (substitucí) rekurzívních funkcí do Δ_1 (nebo *RE*, nebo Π_1) podmínky vznikne opět Δ_1 (nebo *RE*, nebo Π_1) podmínka.

29. Dokažte, že rovnost $\mathrm{Thm}(T) = \bigcap \{ \mathrm{Thm}(S) \,;\, S$ je úplné rozšíření $T \}$ platí pro libovolnou teorii T. Na základě toho zdůvodněte, že když teorie T má pouze konečně mnoho navzájem neekvivalentních úplných rozšíření v tomtéž jazyce a všechna jsou rozhodnutelná, pak T je rozhodnutelná. Takže, teorie vzniklá z teorie DNO odstraněním axiomů týkajících se největších a nejmenších objektů je rozhodnutelná.

30. Nechť T je rekurzívně axiomatizovatelné rozšíření Robinsonovy aritmetiky, které je formulované v aritmetickém jazyce a je korektní (tj. $\mathbb{N} \models T$). Rozhodněte, zda následující tvrzení platí.

(a) Když φ a ψ jsou sentence a $T \vdash \varphi \vee \psi$, pak $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \psi$.
(b) Když φ a ψ jsou Σ_1-sentence a $T \vdash \varphi \vee \psi$, pak $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \psi$.

Návod. V (a) užijte První Gödelova větu. V (b) užijte větu o Σ-úplnosti zvlášť na φ a na ψ.

31. Ve stejné situaci rozhodněte, zda platí
(a) Je-li $\exists x \varphi(x)$ aritmetická sentence taková, že $T \vdash \exists x \varphi(x)$, pak existuje číslo n splňující podmínku $T \vdash \varphi(\overline{n})$.
(b) Je-li $\exists x \varphi(x)$ aritmetická sentence taková, že $T \vdash \exists x \varphi(x)$ a navíc $\varphi \in \Delta_0$, pak existuje číslo n splňující podmínku $T \vdash \varphi(\overline{n})$.

Návod. V (a) vezměte formuli $\psi(y) \in \Delta_0$, pro kterou platí $\mathbb{N} \models \forall y \psi(y)$ a $T \nvdash \forall y \psi(y)$. Její existenci zaručuje První Gödelova věta. Dále uvažujte sentenci $\exists x \forall y (\psi(y) \vee \neg \psi(x))$.